

A7. Cargol pitagòric

Entrega

Heu d'entregar a través del Xtend:

- Un arxiu PDF amb les respostes a totes les preguntes
- Tots els arxius de Geogebra generats
- Imatges dels cargols artístics

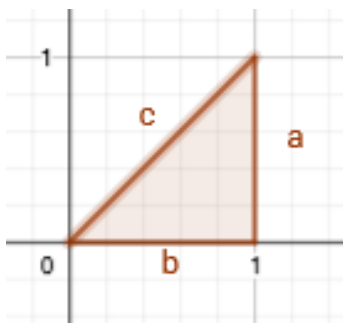
A més, heu d'incloure el resultat (imatges dels cargols acabats) en el vostre portfoli junt amb una explicació general de que heu fet i de com es crea un cargol pitagòric.

Activitat

Part1: Què és un cargol pitagòric?

Conegut també com a espiral pitagòric, espiral d'Einstein o espiral d'arrels quadrades. És un espiral compost per triangles rectangles continus (un al costat de l'altre) atribuïda pel Teorema de Pitàgores.

1.1.- Dibuixa un triangle rectangle donant nom als costats, escriu el Teorema de Pitàgores i aïlla la hipotenusa.



Teorema de Pitàgores: $a^2 + b^2 = c^2$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

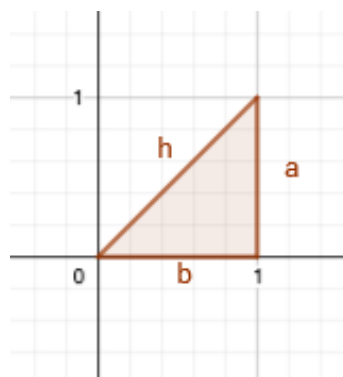
1.2.- Si dibuixem un triangle rectangle on els catets són nombres naturals poden calcular el valor de diferents arrels quadrades escollint diferents valors per als catets. Completa la següent taula.

Primer Catet	Segon Catet	Hipotenusa
1	1	$\sqrt{1^2 + 1^2}$ $= \sqrt{2}$
1	2	$\sqrt{1^2 + 2^2}$ $= \sqrt{5}$
1	3	$\sqrt{1^2 + 3^2}$ $= \sqrt{10}$
1	4	$\sqrt{1^2 + 4^2}$ $= \sqrt{17}$

2	3	$\sqrt{2^2 + 3^2}$ $= \sqrt{13}$
2	2	$\sqrt{2^2 + 2^2}$ $= \sqrt{8}$
3	4	$\sqrt{3^2 + 4^2}$ $= \sqrt{25}$

a) Obre el Geogebra i construeix tres dels triangles anteriors fent visibles el valor numèric dels segments. Copia aquí la imatge i comprova amb la calculadora que el càlcul gràfics són correctes.

Catet a: 1
 Catet b: 1
 Hipotenusa h: $\sqrt{2} = 1,414213562373095$
 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

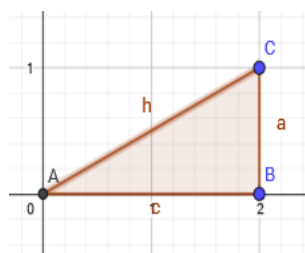


Càlculs gràfics

	h : Segment (C, A, t1) → 1.41
	b : Segment (A, B, t1) → 1
	a : Segment (B, C, t1) → 1

Catet a: 1
 Catet b: 2
 Hipotenusa h: $\sqrt{5} = 2,23606797749979$

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

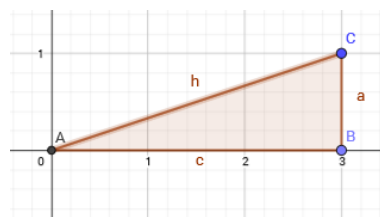


	h : Segment (C, A, t1) → 2.24
	a : Segment (B, C, t1) → 1
	c : Segment (A, B, t1) → 2

Càlculs Gràfics

Catet a: 1
 Catet b: 3
 Hipotenusa h: $\sqrt{10} = 3,162277660168379$

$$\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$



Càlculs Gràfics

	h : Segment (C, A, t1) → 3.16
	a : Segment (B, C, t1) → 1
	c : Segment (A, B, t1) → 3

- b) Aquest sistema permet construir l'arrel quadrada de molts nombres però no de tots. A més, és un mètode no sistemàtic (cal anar provant valors per als catets fins trobar els que quadren amb l'arrel que es vol calcular). Fixa't en el següent dibuix que permet calcular $\sqrt{3}$ de manera gràfica. Explica com s'ha fet.



- Construir un triangle rectangle amb els catets $a=1$ i $b=1$. Com hem vist abans per calcular la hipotenusa fem: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, i $\sqrt{2}=1,414213562373095$. On $a=1^2$, $b=1^2$ i $h=\sqrt{2}$.
- Amb el costat $\sqrt{2}$ que seria l'a, li han afegit un costat d'1 que seria el b .
- La hipotenusa és $\sqrt{\sqrt{2} + 1^2} \approx 1,73$
- I és així com han calculat $\sqrt{3}$ a partir de $\sqrt{2}$.

Competència 10: Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres			
	Assolida		
	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
No Assolida	Expressar i comprendre idees matemàtiques en llenguatge verbal (oral i escrit) fent un ús correcte de la terminologia matemàtica.	Expressar i comprendre idees matemàtiques en llenguatge verbal (oral i escrit) fent un ús correcte de la terminologia i les formes de representació pròpies de les matemàtiques (símbols, gràfics, figures, taules, esquemes, etc.)	Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió fent ús del llenguatge matemàtic i comprendre les expressades pels altres. Incorporar terminologia matemàtica al llenguatge habitual
L'explicació no és correcta	L'explicació s'entén però no inclou cap càlcul ni expressió algebraica del procès.	L'explicació s'entén i inclou els càlculs i expressions algèbriques necessaris en el procès.	L'explicació s'entén i inclou els càlculs i expressions algèbriques necessaris en el procès. A més, fa servir tota la terminologia matemàtica adequada (noms dels costats, dels teoremes...)

c) Quant valdria la hipotenusa d'un tercer triangle construït a sobre de l'anterior seguint el mateix patró? Explica el raonament que t'ha portat a veure-ho.

- Ara tinc un catet a d' $\sqrt{3}$ i afegeixo un catet b d'1.
- I la hipotenusa seria $\sqrt{\sqrt{3+1}^2} \approx 1,732050807568877 = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

d) Omple la següent taula que mostra els resultats del càlcul gràfics de les arrels successives si anem afegint triangles a la construcció anterior.

Primer Catet	Segon Catet	Hipotenusa
1	1	$\sqrt{1^2 + 1^2}$ $= \sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2}$ $= \sqrt{3}$
$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} =$ $\sqrt{4} = 2$
2	1	$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{\sqrt{5}^2 + 1^2}$ $= \sqrt{5+1}$ $= \sqrt{6}$
$\sqrt{6}$	1	$\sqrt{\sqrt{6}^2 + 1^2}$ $= \sqrt{6+1}$ $= \sqrt{7}$
$\sqrt{7}$	1	$\sqrt{\sqrt{7}^2 + 1^2}$ $= \sqrt{7+1}$ $= \sqrt{8}$

e) A mesura que es van creant triangles es genera un cargol pitagòric. Explica el procés de construcció tal com ho has vist.

- triangle rectangle de catets a=1 i b=1.
- hipotenusa $\sqrt{2}$
- construir un altre triangle rectangle a sobre (en aquest cas utilitzaríem la hipotenusa $\sqrt{2}$ com a i afegiríem un catet b d'1.
- la hipotenusa d'aquest triangle rectangle és $\sqrt{3}$.
- Repetint el mateix procediment a $\sqrt{3}$ afegim un altre catet 1.
- Ens donaria la hipotenusa $\sqrt{4} = 2$.
- La hipotenusa següent sempre és l'arrel quadrada següent de manera contínua.
- I gràcies a aquest mètode, al final de tot, ens queda una imatge semblant a un cargol/espiral.

Part2: Construïm una base de cargol amb Geogebra

Seguirem un procès concret per crear un cargol mòbil que permeti canviar fàcilment les condicions inicials creat nous cargols sense haver de tornar a construir-lo.

- a) Col·loca un punt fixat a l'origen de coordenades fent servir l'eina intersecció.
- b) Crea un segon punt (B) el el punt de coordenades (1,1).
- c) Amb l'eina de recta paral·lela crea una recta que sigui paral·lela al eix Y que passi pel punt B.
- d) Troba el punt d'intersecció entre la recta i l'eix X. Has de tenir una construcció com la de la imatge.
- e) Oculta els eixos i la recta.
- f) Amb l'eina de segments construeix el triangle ABC. Com pots observar, ara tens un triangle rectangle amb hipotenusa $\sqrt{2}$ catets 1.

Amb aquest triangle de base fet comencem el procès iteratiu per anar construït tota la resta dels triangles que formaran el cargol.

- g) Fes una recta perpendicular a la hipotenusa de l'últim triangle que passi pel punt de l'extrem exterior de dita hipotenusa (en la primera iteració el punt B).
 - h) Fes una circumferència centrada en el mateix punt i que tingui com a radi l'extrem de la hipotenusa anterior (en la primera iteració centre en el punt B i extrem en el punt C).
 - i) Troba el punt d'intersecció entre la recta i la circumferència. Observa que hi ha dos punts d'intersecció i només ens interessa el que segueix la direcció del cargol.
 - j) Oculta la recta i la circumferència i fes dos segments que tanquin el triangle.
 - k) Torna al pas
- g) i construeix el següent triangle.

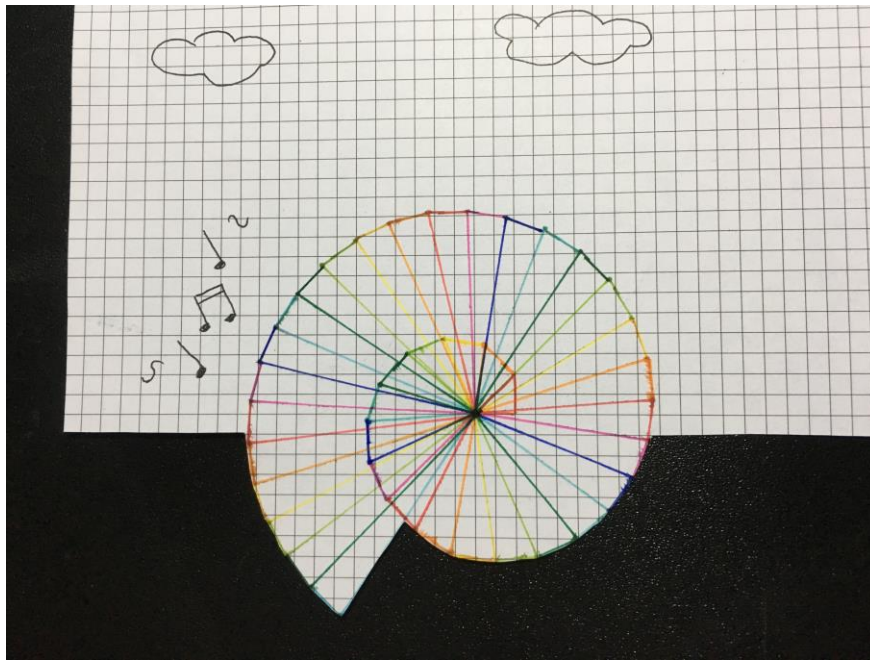
Quan ja tinguis tres o quatre iteracions fetes prova de canviar la posició del punt B i observa con els modifica la construcció feta. Torna a deixar el punt B en la posició (1,1).

Quan tinguis aproximadament una volta sencera ja tindràs un primer cargol construït. Guarda l'arxiu amb el nom de «cargol pitagòric base». A aparti d'aquí farem còpies per als diferents exercicis.

Part 3: Creem cargols pitagòrics

3.1.- Crea una còpia de l'arxiu i prova d'ocultar i visualitzar diferents objectes (punts, rectes segments, circumferències), canviar colors, visualitzar o no les mesures o els objectes per donar un aspecte artístic al teu cargol. Guarda algunes imatges del que que vagis construint. Ves guardant còpies de l'arxiu per generar diferents versions.

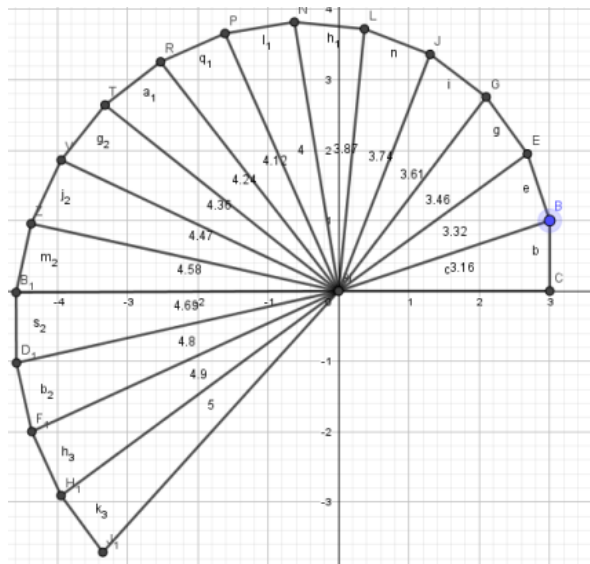
Després d'experimentar genera una imatge que tingui un cert valor (matemàtic i artístic) i copia-la en el teu document amb una explicació justificada de perquè has escollit aquesta imatge. Amplia el teu cargol amb més iteracions si et sembla interessant o amb textos i construccions de recolzament. Pots ajudar-te amb un programa de edició d'imatges. Aquí tens un exemple on es veuen les arrels quadrades de tots els nombres naturals entre el 1 i el 25 tot destacant les arrels exactes.



3.2.- Torna a obrir l'arxiu base. Fes que tots els segments interiors mostrin el seu valor. Modifica la coordenada X del punt B canviant el seu valor a la finestra algebraica per a que el primer triangle calculi una arrel diferent. Per exemple si li donem el punt (2,1), obtenim una sèrie de totes les arrels però començant per $\sqrt{5}$.

- Modifica el punt per a que comenci per $\sqrt{10}$ i representa les seves arrels successives. Fes una còpia de la imatge. Fins a quina arrel arriba el teu cargol?

El meu cargol arriba fins a $\sqrt{25}=5$.

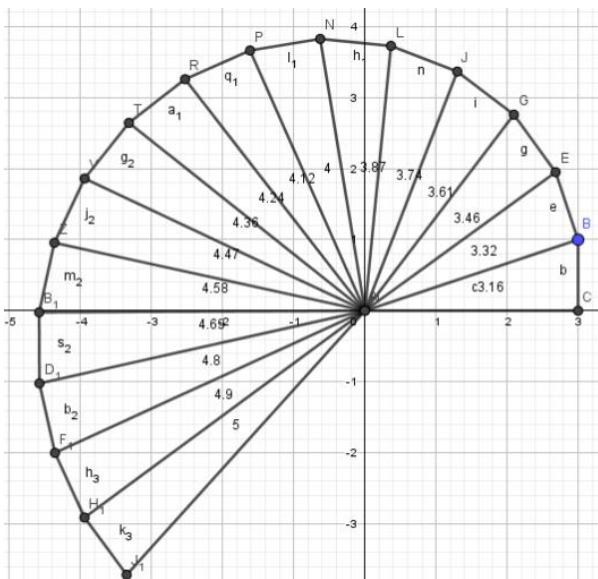


b) Es poden crear cargols que mostrin les arrels successives començant per qualsevol valor d'aquesta manera? Justifica la resposta.

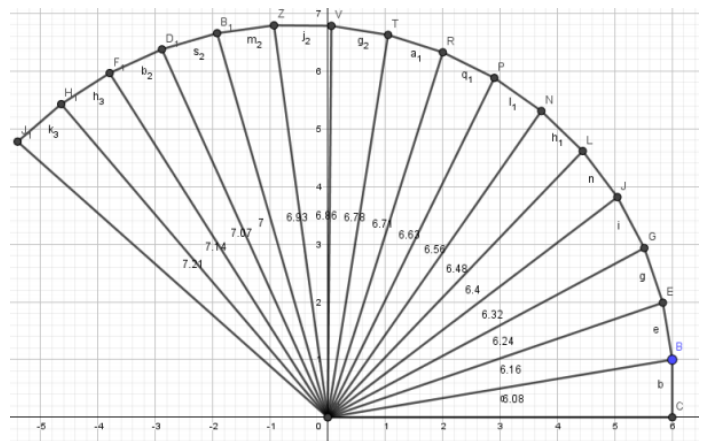
Sí, ja que qualsevol nombre en el catet a i 1 com a catet b, si es van afegint, sempre hi hauran arrels successives.

c) Dona els valors de 3, 6 i 9 a la coordenada X del punt B, copia imatges dels cargols que obtens. Quina és la primera arrel que s'està calculant en cada cas? Que passa amb l'arrel quadrada dels nombres consecutius a mesura que són més grans? Perquè?

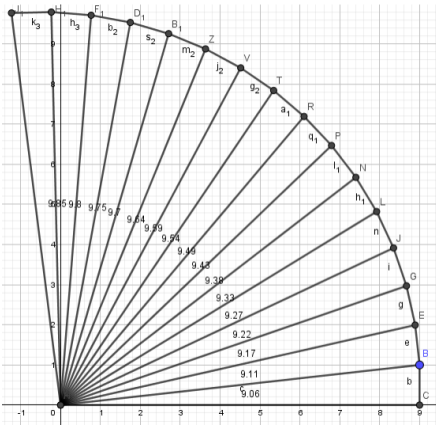
Coordenada X=3



Coordenada X =6



Coordenada X=9



Com més grans siguin les arrels quadrades més grans són els decimals.

3.3.- Si canviem, també, la coordenada Y del punt B modifiquem el catet exterior de tots els triangles. Llavors ja no construïm les arrels successives. Sinó altres sèries d'arrels. Crea un cargol amb una d'aquestes sèries que et sembli estèticament interessant i omple una taula com les de l'exercici 2 amb els valors dels costats de tots els teus triangles. Dona un bon aspecte estètic a la teva construcció i posa'n una imatge en el document. Pot ser has de afegir o treure iteracions al teu cargol o fer un tractament posterior de la imatge.

Primer Catet	Segon Catet	Hipotenusa
2	2	$\sqrt{2^2 + 2^2} =$ $\sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$
4	2	$\sqrt{4^2 + 2^2} =$ $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
6	2	$\sqrt{6^2 + 2^2} =$ $\sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$
8	2	$\sqrt{8^2 + 2^2} =$ $\sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$

